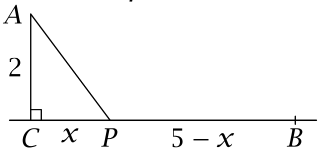
Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 1992

Opgave 1. *En mand i en robåd befinder sig i punktet A i 2 kilometers afstand fra en retlinet kyststrækning. Ved først at ro ind til et punkt P og derefter spadsere langs med kysten når han frem til punktet B, som ligger i en afstand 5 kilometer fra C, der er punktet på kysten nærmest A. Mandens ro-hastighed er 3 kilometer i timen, og hans spadsere-hastighed er 5 kilometer i timen. Afgør hvor P skal placeres mellem C og B så at manden på kortest mulig tid kommer fra A til B.*



Løsning. Vi sætter $|CP| = x$. Så er $|AP| = \sqrt{x^2+4}$ (Pythagoras) og $|PB| = 5 - x$. Den samlede turs varighed er da

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{5-x}{5} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + 1 - \frac{x}{5}.$$

Vi finder minimum ved at undersøge nulpunkter og fortegn for den afledede funktion

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x + 0 - \frac{1}{5} = \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5}.$$

Vi ser at $f'(x) = 0$ når $5x = 3\sqrt{x^2+4}$. Ved kvadrering og omskrivning fås $16x^2 = 36$ med løsningen $x = \frac{3}{2}$ i det relevante interval. Da $f'(0)$ er negativ og $f'(5)$ positiv (ses ved indsættelse i udtrykket for $f'(x)$), konkluderes at f har minimum for $x = \frac{3}{2}$. Punktet P skal altså placeres 1,5 kilometer fra C.

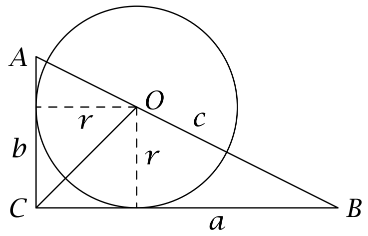
Opgave 2. *I en retvinklet trekant betegner a og b længderne af de to kateter. En cirkel med radius r har centrum på hypotenusen og rører begge kateter. Vis at*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}.$$

Løsning. Cirklens centrum betegnes O. Arealet af trekant ABC er lig med summen af arealerne af trekanterne ACO og BCO. Altså er $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}ra$, og dermed $ab = rb + ra$. Ved division med abr fås

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

som ønsket.



Opgave 3. *Lad x og y være positive tal med $x + y = 1$. Vis at*

$$(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y}) \geq 9.$$

Løsning. Vi viser uligheden ved at påvise at den er ensbetydende med et sandt udsagn. Ved multiplikation med det positive tal xy omskrives den ønskede ulighed til $(x + 1)(y + 1) \geq 9xy$. Med brug af $x + y = 1$ kan venstre side omskrives: $(x + 1)(y + 1) = x + xy + y + 1 = xy + (x + y) + 1 = xy + 2$. Vi skal altså vise at $xy + 2 \geq 9xy$, dvs.

$$\frac{1}{4} \geq xy.$$

Ved igen at udnytte $x + y = 1$ kan denne ulighed videre omskrives til $\frac{1}{4} \geq x(1 - x)$ eller $x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$, dvs. $(x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$. Da dette er sandt for alle værdier af x, er den oprindelige ulighed hermed bevist.

Opgave 4. *Lad a, b og c betegne sidelængderne og m_a, m_b og m_c medianernes længder i en vilkårlig trekant. Vis at*

$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} < 1.$$

Vis endvidere at der ikke findes noget snævrere interval der for enhver trekant indeholder størrelsen

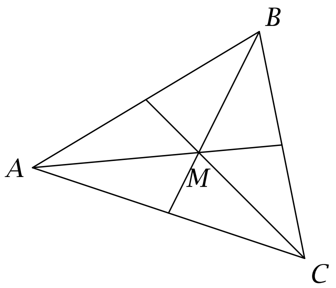
$$\frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c}.$$

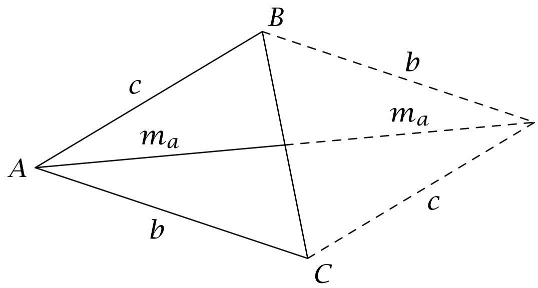
Løsning. Medianerne skærer hinanden i et punkt M, og de deler hinanden i forholdet $2 : 1$. Ved betragtning af trekant BMC fås

$$a < \tfrac{2}{3}m_b + \tfrac{2}{3}m_c,$$

idet en side i en trekant altid er mindre end summen af de to øvrige sider. Tilsvarende fås for trekant AMC og trekant AMB

$$b < \tfrac{2}{3}m_a + \tfrac{2}{3}m_c,$$
$$c < \tfrac{2}{3}m_a + \tfrac{2}{3}m_b.$$





Ved addition af de tre uligheder fås

$$a + b + c < \tfrac{4}{3}m_a + \tfrac{4}{3}m_b + \tfrac{4}{3}m_c$$

og dermed

$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c}.$$

Hermed er den ene del af den ønskede dobbeltulighed bevist.

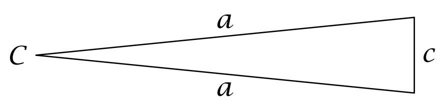
Betragtes nu en passende trekant i det parallelogram der fremkommer ved at dreje trekant ABC 180° om midtpunktet af BC, ses at $2m_a < b + c$. For de øvrige sider fås på tilsvarende måde $2m_b < a + c$ og $2m_c < a + b$. Ved addition fås

$$2(m_a + m_b + m_c) < 2(a + b + c),$$

hvoraf

$$\frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} < 1.$$

Hermed er hele dobbeltuligheden bevist.



For at indse at uligheden ikke kan skærpes, betragter vi en ligebenet trekant ABC med $a = b$. Hvis $\angle C$ nærmer sig 0°, vil summen af de tre sider nærme sig $2a$, mens summen af de tre medianer vil nærme sig $a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = 2a$. Forholdet $\frac{m_a+m_b+m_c}{a+b+c}$ kan derved komme vilkårlig tæt på $\frac{2a}{2a} = 1$. Hvis omvendt $\angle C$ nærmer sig 180°, vil summen af siderne nærme sig $a + a + 2a = 4a$, mens summen af medianerne vil nærme sig $0 + \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}a = 3a$. Forholdet $\frac{m_a+m_b+m_c}{a+b+c}$ kan derved komme vilkårlig tæt på $\frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$. Hermed har vi vist at intervalgrænserne 1 og $\frac{3}{4}$ er de bedst mulige.

Opgave 5. *I en hat ligger* 1992 *sedler med alle numre fra* 1 *til* 1992*. På tilfældig måde trækkes to sedler samtidig fra hatten; differensen mellem tallene på de to sedler skrives på en ny seddel, som lægges i hatten, mens de to udtrukne sedler kastes bort. Der* *fortsættes på denne måde indtil der kun er én seddel tilbage i hatten. Vis at der på denne seddel står et lige tal.*

Løsning. I hvert træk vil antallet af sedler med ulige tal enten reduceres med to (nemlig hvis der fjernes to ulige sedler og dermed lægges en lige) eller være uændret (hvis der fjernes to lige og lægges en lige, eller hvis der fjernes en lige og en ulige og lægges en ulige). Da antallet af sedler med ulige tal fra start af er lige (nemlig $1992/2 = 996$), vil det derfor vedblive med at være lige. Antallet af ulige sedler når der kun er én seddel tilbage, er derfor nul. Den sidste seddel bærer dermed et lige nummer.