Georg Mohr-Konkurrencen

Opgaver · 1992

Opgave 1. En mand i en robåd befinder sig i punktet A i 2 kilometers afstand fra en retlinet kyststrækning. Ved først at ro ind til et punkt P og derefter spadsere langs med kysten når han frem til punktet B, som ligger i en afstand 5 kilometer fra C, der er punktet på kysten nærmest A. Mandens ro-hastighed er 3 kilometer i timen, og hans spadsere-hastighed er 5 kilometer i timen. Afgør hvor P skal placeres mellem C og B så at manden på kortest mulig tid kommer fra A til B.

Opgave 2. I en retvinklet trekant betegner a og b længderne af de to kateter. En cirkel med radius r har centrum på hypotenusen og rører begge kateter. Vis at

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}.$$

Opgave 3. Lad x og y være positive tal med $x + y = 1$. Vis at

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

Opgave 4. Lad a, b og c betegne sidelængderne og m_a, m_b og m_c medianernes længder i en vilkårlig trekant. Vis at

$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} < 1.$$

Vis endvidere at der ikke findes noget snævrere interval der for enhver trekant indeholder størrelsen

$$\frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c}.$$

Opgave 5. I en hat ligger 1992 sedler med alle numre fra 1 til 1992. På tilfældig måde trækkes to sedler samtidig fra hatten; differensen mellem tallene på de to sedler skrives på en ny seddel, som lægges i hatten, mens de to udtrukne sedler kastes bort. Der fortsættes på denne måde indtil der kun er én seddel tilbage i hatten. Vis at der på denne seddel står et lige tal.