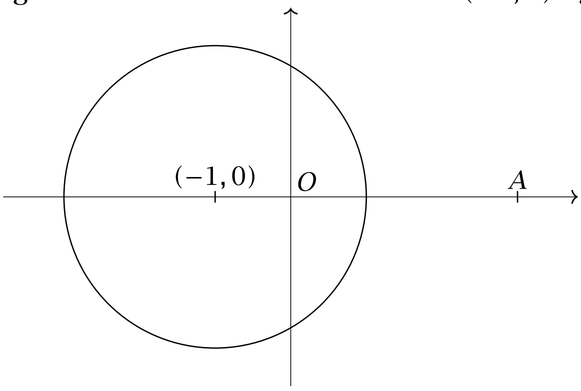
Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 1991

Opgave 1. *Beskriv mængden af de punkter $P(x,y)$ som har dobbelt så stor afstand til $A(3,0)$ som til $O(0,0)$.*
Løsning. Ifølge afstandsformlen er $|AP| = \sqrt{(x-3)^2+y^2}$ og $|OP| = \sqrt{x^2+y^2}$. Derfor er betingelsen $|AP| = 2|OP|$ ensbetydende med $(x-3)^2+y^2 = 4(x^2+y^2)$. Dette omskrives til $3x^2+3y^2+6x-9=0$ og videre til

$$(x+1)^2+y^2=4.$$

Punkterne $P(x,y)$ udgør altså en cirkel med centrum i $(-1,0)$ og radius 2.



Opgave 2. *Bevis at der for* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *gælder at* $\sin x + \tan x > 2x$.
Løsning. Vi viser den ønskede ulighed ved at vise at funktionen

$$f(x) = \sin x + \tan x - 2x$$

er positiv for alle $x \in]0;\frac{\pi}{2}[$. Ved differentiation fås

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2.$$

Da $0 < \cos x < 1$ for alle x i intervallet $]0;\frac{\pi}{2}[$, har vi at $\cos x > \cos^2 x$ og $\cos x \neq \frac{1}{\cos x}$ for alle x i dette interval. Derfor er

$$\begin{aligned} f'(x) &> \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \\ &= \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Da nu f er kontinuert i intervallet $[0;\frac{\pi}{2}[$ og differentiabel med positiv differentialkvotient i $]0;\frac{\pi}{2}[$, er f voksende i $[0;\frac{\pi}{2}[$. Da $f(0) = 0$ (ses ved indsættelse), følger heraf at $f(x) > 0$ i hele intervallet $]0;\frac{\pi}{2}[$ som ønsket.

Opgave 3. *En retvinklet trekant har omkreds* 60*, og højden på hypotenusen har længde* 12*. Bestem sidernes længder.*

Løsning. Lad c være længden af hypotenusen og a og b længden af kateterne. Vi har da $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot c$ (trekantens areal på to måder), dvs. $ab = 12c$, $a^2 + b^2 = c^2$ (Pythagoras) og $a + b + c = 60$ (omkreds). Af de to første ligninger fås $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 24c$. Af den sidste fås $(a + b)^2 = (60 - c)^2$. Altså er $c^2 + 24c = (60 - c)^2$. Denne ligning løses: $c^2 + 24c = 3600 + c^2 - 120c$ giver $144c = 3600$ og dermed $c = \frac{60^2}{12^2} = 5^2 = 25$. Vi har nu $ab = 300$ og $a + b = 35$. Heraf følger at tallene a og b er 15 og 20 (se røddernes sum og produkt – eller løs ligningssystemet ved at indsætte $b = 35 - a$ i den første ligning, finde løsningerne $a = 15$ og $a = 20$ ved at løse den fremkomne andengradsligning og til slut se at de tilsvarende værdier for b er henholdsvis $b = 20$ og $b = 15$). Sidelængderne er altså 15, 20 og 25.

Opgave 4. *Lad a, b, c og d være vilkårlige reelle tal. Bevis at hvis $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$, så er $a = b = c = d$.*

Løsning. Ved multiplikation med 2 fås $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 = 2ab + 2bc + 2cd + 2da$, som videre omskrives til $a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + c^2 + d^2 - 2cd + d^2 + a^2 - 2ad = 0$, dvs.

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 = 0.$$

Venstre side af ligningen består af fire led som hver især er positive eller 0. Da summen er 0, må alle leddene være lig med 0, dvs. $a = b$, $b = c$, $c = d$, $d = a$ som ønsket.

Opgave 5. *Vis at uanset hvordan* 15 *punkter afsættes inden for en cirkel med radius* 2 *(cirkelranden medregnet), vil der eksistere en cirkel med radius* 1 *(cirkelranden medregnet) som indeholder mindst tre af de* 15 *punkter.*

Løsning. Den store cirkel kan overdækkes af syv cirkler med radius 1 som vist på figuren. Ifølge skuffeprincippet vil mindst en af disse da indeholde mindst tre punkter (hvis nemlig hver kun indeholdt højst to punkter, kunne der højst være $7 \cdot 2 = 14$ punkter i alt).