Baltic Way
16. november 2024, Tartu, Estland Version: Danish

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Det er tilladt at stille spørgsmål de første 30 minutter.
Tilladte hjælpemidler: Skrive- og tegneredskaber.

Opgave 1. Lad α være et reelt tal forskelligt fra 0. Find alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som opfylder at

$$xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 2. Lad $\mathbb{R}^+$ være mængden af positive reele tal. Find alle funktioner $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, som opfylder at

$$\frac{f(a)}{1+a+ca} + \frac{f(b)}{1+b+ab} + \frac{f(c)}{1+c+bc} = 1$$

for alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ hvor $abc = 1$.

Opgave 3. De positive reelle tal $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ står på en tavle. Et træk består i at vælge to tal på tavlen x og y, slette dem og skrive tallet $\dfrac{x^2+6xy+y^2}{x+y}$ på tavlen. Efter 2023 træk er der kun ét tal c tilbage på tavlen. Vis at

$$c < 2024\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2024})\,.$$

Opgave 4. Find det største reelle tal α, således at følgende ulighed gælder for alle ikke-negative reelle tal x, y og z:

$$(x+y+z)^3 + \alpha\left(x^2z + y^2x + z^2y\right) \geq \alpha\left(x^2y + y^2z + z^2x\right).$$

Opgave 5. Find alle positive reelle tal λ, således at enhver følge $a_1, a_2, \ldots$ af positive reelle tal, som opfylder

$$a_{n+1} = \lambda \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

for alle $n \geq 2024^{2024}$, er begrænset.

Bemærkning: En følge $a_1, a_2, \ldots$ af positive reelle tal er *begrænset*, hvis der findes et reelt tal M så $a_i < M$ for alle $i = 1, 2, \ldots$.

Opgave 6. En *labyrint* er et system af 2024 huler og 2023 ikke-skærende (to-vejs) korridorer, som hver forbinder to huler, hvor hvert par af huler er forbundet gennem en række af korridorer. Til at starte med står Erik i en korridor, som forbinder to huler. I et træk, kan han gå gennem en af hulerne til en ny korridor, som forbinder denne hule til en tredje hule. Når han gør dette, vil den korridor han lige har været i på magisk vis forsvinde og blive erstattet af en ny korridor, der forbinder slutningen af hans nye korridor og starten af hans forrige korridor. (M.a.o. hvis Erik var i en korridor, der forbinder hule a og b, og han gik gennem hule b ind i en korridor der forbinder hule b og c, så vil korridoren mellem a og b forsvinde og en ny korridor mellem a og c vil opstå.)

Da Erik godt kan lide at designe labyrinter, og har et nyt layout i tankerne, undrer han sig over, hvorvidt han kan transformere labyrinten til dette layout ved at bruge disse træk. Bevis at dette er muligt uanset labyrintens oprindelige layout og hans startposition.

Opgave 7. Et 45×45 bræt har fået fjernet det midterste felt. For hvilke positive heltal n er det muligt at opdele det resterende areal i $1 \times n$ og $n \times 1$ rektangler?

Opgave 8. Lad a, b, n være positive heltal således at $a + b \leq n^2$. Alma og Bertha spiller et spil på et (til et starte med ufarvet) $n \times n$ bræt på følgende måde:

- Først farver Alma a felter grønne.
- Derefter farver Bertha b andre felter blå.

Alma vinder, hvis hun kan finde en sti bestående af ikke-blå felter fra det nederste venstre felt til det øverste højre felt (hvor en sti er en følge af felter, således at to på hinanden følgende felter i følgen har en side tilfælles), ellers vinder Bertha. Bestem ud fra a, b og n, hvem der har en vindende strategi.

Opgave 9. Lad S være en endelig mængde. For et positivt heltal n, siges en funktion $f\colon S \to S$ at være en n-*potens*, hvis der eksisterer en funktion $g\colon S \to S$, sådan at

$$f(x) = \underbrace{g(g(\ldots g(x)\ldots))}_{g \text{ anvendt } n \text{ gange}}$$

for alle $x \in S$.

Antag at en funktion $f\colon S \to S$ er en n-potens for alle positive heltal n. Gælder det nødvendigvis at $f(f(x)) = f(x)$ for alle $x \in S$?

Opgave 10. En frø står på et felt på uendeligt stort bræt, hvis rækker strækker sig fra øst til vest og søjler fra nord til syd. Et træk for frøen består i enten at hoppe ét eller to felter frem i den retning den vender mod og dernæst dreje efter følgende regler:

1) Hvis frøen hopper ét felt frem, så drejer den 90° til højre;
2) og hvis frøen hopper to felter frem, så drejer den 90° til venstre.

Er det muligt for frøen at nå til feltet, der ligger præcist 2024 felter nord fra det oprindelige startfelt, hvis den starter med at vende mod

a) nord;
b) øst?

Opgave 11. På en cirkel med centrum O ligger punkterne A, B, C, D i denne rækkefølge, og der gælder at AC er vinkelret på BD. Punkterne X og Y ligger på den omskrevne cirkel til trekant BOD, sådan at $\angle AXO = \angle CYO = 90°$. Lad M være midtpunktet af AC. Bevis at BD tangerer den omskrevne cirkel til trekant MXY.

Opgave 12. Lad ABC være en spidsvinklet trekant med omskreven cirkel ω, sådan at $AB < AC$. M er midtpunktet af buestykket BC af ω som indeholder punktet A, og $X \neq M$ er det andet punkt på ω så $AX = AM$. Punkterne E og F ligger henholdsvis på siden AC og AB sådan at $EX = EC$ og $FX = FB$. Bevis at $AE = AF$.

Opgave 13. Lad ABC være en spidsvinklet trekant, hvor højderne skærer i H. Lad D være et punkt udenfor den omskrevne cirkel til trekant ABC, sådan at $\angle ABD = \angle DCA$. Spejlingen af AB i BD skærer CD i X. Spejlingen af AC i CD skærer BD i Y. Linjerne gennem X og Y vinkelret på henholdsvis AC og AB skærer i P. Bevis at punkterne D, P og H ligger på linje.

Opgave 14. Lad ABC være en spidsvinklet trekant med omskreven cirkel ω. Højderne AD, BE og CF i trekant ABC skærer i H. Et punkt K er valgt på linjen EF, sådan at $KH \parallel BC$. Bevis at spejlingen af H i KD ligger på ω.

Opgave 15. Der er en mængde af $N \geq 3$ punkter i planen sådan at ingen tre ligger på linje. Tre punkter A, B, C i mængden udgør en *baltisk trekant*, hvis intet andet punkt i mængden ligger på den omskrevne cirkel til trekant ABC. Antag at der findes mindst én baltisk trekant.

Vis at der findes mindst $\dfrac{N}{3}$ baltiske trekanter.

Opgave 16. Bestem alle positive, sammensatte heltal n, sådan at for enhver divisor d af n, findes heltal $k \geq 0$ og $m \geq 2$, sådan at $d = k^m + 1$.

Opgave 17. Findes der uendeligt mange kvadrupler (a, b, c, d) af positive heltal, sådan at tallet $a^{a!} + b^{b!} - c^{c!} - d^{d!}$ er et primtal og $2 \leq d \leq c \leq b \leq a \leq d^{2024}$?

Opgave 18. En uendelig følge $a_1, a_2, \ldots$ af postive heltal, opfylder at $a_n \geq 2$ og a_{n+2} deler $a_{n+1} + a_n$ for alle $n \geq 1$. Bevis at der findes et primtal, som deler uendeligt mange led i følgen.

Opgave 19. Findes der et positivt heltal N, som er deleligt med mindst 2024 forskellige primtal og hvis divisorer $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = N$ opfylder at tallet

$$\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \ldots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

er et heltal?

Opgave 20. Positive heltal a, b og c opfylder følgende ligningssystem:

$$\begin{cases} (ab-1)^2 = c\left(a^2+b^2\right) + ab + 1, \\ a^2 + b^2 = c^2 + ab. \end{cases}$$

a) Bevis at $c + 1$ er et kvadrattal.

b) Find alle sådanne tripler (a, b, c).