Baltic Way

Reykjavík, 13. november

Version: *Danish*

Varighed: 4,5 timer.
Spørgsmål kan stilles de første 30 minutter.
Kun skrive- og tegneredskaber tilladt.

Opgave 1. Lad n være et positivt heltal. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der opfylder ligningen

$$f(x)^n f(x+y) = f(x)^{n+1} + x^n f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 2. Lad a, b og c være sidelængderne i en trekant. Bevis at

$$\sqrt[3]{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)} > \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Opgave 3. Bestem alle uendelige følger $(a_1, a_2, \dots)$ af positive heltal sådan at

$$a_{n+1}^2 = 1 + (n+2021)a_n$$

for alle $n \geq 1$.

Opgave 4. Lad Γ være en cirkel i planen og lad S være et punkt på Γ. Mario og Luigi kører rundt på cirklen Γ i deres go-karts. De starter begge i S på samme tid. De kører begge i netop 6 minutter med konstant fart i retning mod uret på cirklen. I løbet af disse 6 minutter gennemfører Luigi netop én omgang omkring Γ, og Mario, der er tre gange så hurtig, gennemfører netop tre omgange.

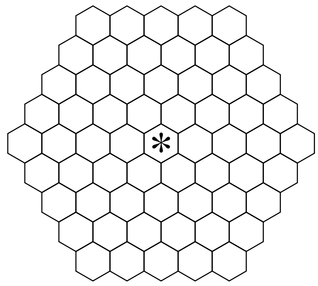
Mens Mario og Luigi kører i deres go-karts, placerer Prinsesse Peach sig sådan at hun altid er præcis midt på korden mellem dem. Når hun passerer et punkt som hun allerede har besøgt tidligere, markerer hun punktet med en banan.

Hvor mange punkter i planen, bortset fra S, er markeret med bananer efter de 6 minutter?

Opgave 5. Lad $x, y \in \mathbb{R}$ opfylde at $x = y(3-y)^2$ og $y = x(3-x)^2$. Bestem alle mulige værdier for $x + y$.

Opgave 6. Lad n være et positivt heltal og t et reelt tal forskellig fra nul. Lad $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$ være reelle tal (ikke nødvendigvis forskellige). Bevis at der eksisterer forskellige indices $i_1, i_2, \dots, i_n$ sådan at vi for alle $1 \leq k, l \leq n$ har at $a_{i_k} - a_{i_l} \neq t$.

Opgave 7. Lad $n > 2$ være et heltal. Anna, Edda og Magni spiller et spil på et sekskantet bræt bestående af felter der er regulære sekskanter, med n felter langs hver side. Figuren viser et bræt med 5 felter langs hver side. Det midterste felt er markeret.



Spillet begynder med en brik placeret på et af brættets hjørnefelter. Edda og Magni spiller sammen mod Anna, og de vinder hvis brikken er på det midterste felt efter en vilkårlig spillers tur. Anna, Edda og Magni skiftes til at flytte brikken: Anna starter, dernæst Edda, så Magni, og så videre.

Turene forløber på følgende måde:

- Anna skal flytte brikken til et nabofelt i hvilken som helst retning.
- Edda skal flytte brikken to felter ligeud i én af de 6 mulige retninger.
- Magni har valget mellem at springe sin tur over eller at flytte brikken 3 felter ligeud i én af de 6 mulige retninger.

Bestem alle n for hvilke Edda og Magni har en vindende strategi.

Opgave 8. Vi får givet en samling af 2^{2^k} kufferter, hvor k er et ikke-negativt heltal. Netop én kuffert indeholder narkotika. Vi har et ubegrænset antal af narkohunde. Én hund er forkølet, men vi ved ikke hvilken. En test består af tre trin: vælg et antal kufferter fra samlingen af alle kufferter, vælg en narkohund, og lad hunden lugte til alle kufferterne på samme tid. En rask narkohund gør hvis og kun hvis kufferten med narkotika er blandt de valgte kufferter. Om den forkølede narkohund gør, er tilfældigt. Udtænk en strategi til at finde kufferten med narkotika ved brug af højst $2^k + k + 2$ tests, og bevis at strategien fungerer.

Opgave 9. Der er givet 2021 punkter i planen, hvoraf der ikke er tre der ligger på linje. Blandt vilkårlige 5 af disse punkter ligger mindst 4 på samme cirkel. Er det nødvendigvis sandt at mindst 2020 af punkterne ligger på samme cirkel?

Opgave 10. John har en strimmel papir hvorpå der står n reelle tal $a_i \in [0, 1]$, for alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, skrevet på række. Bevis at for ethvert $k < n$, kan John klippe strimlen i k ikke-tomme stykker, med klip mellem nabotal, på en sådan måde at summen af tallene på hvert stykke papir ikke afviger fra nogen anden sum med mere end 1.

Opgave 11. Et punkt P ligger inde i trekant ABC. Punkterne K og L er projektionerne af P på henholdsvis AB og AC. Punktet M ligger på linjen BC så $|KM| = |LM|$, og punktet P' er spejlingen af P i M. Bevis at $\angle BAP = \angle P'AC$.

Opgave 12. Lad I være centrum for den indskrevne cirkel i trekant ABC. Lad F og G være projektionerne af A på henholdsvis BI og CI. Halvlinjerne AF og AG skærer de omskrevne cirkler til trekanterne CFI og BGI for anden gang i henholdsvis K og L. Bevis at linjen AI halverer linjestykket KL.

Opgave 13. Lad D være fodpunktet for højden fra A i den spidsvinklede trekant ABC. Vinkelhalveringslinjen for vinkel DAC skærer BC i K. Lad L være projektionen af K på AC. Lad M være skæringen mellem BL og AD. Lad P være skæringen mellem MC og DL. Bevis at $PK \perp AB$.

Opgave 14. Lad ABC være en trekant hvis omskrevne cirkel Γ har centrum i O. Lad M være midtpunktet af BC. Punktet D er spejlingen af A i BC, og punktet E er skæringen mellem Γ og halvlinjen MD. Lad S være centrum for den omskrevne cirkel til ADE. Bevis at punkterne A, E, M, O og S ligger på samme cirkel.

Opgave 15. For hvilke positive heltal $n \geq 4$ findes der en konveks n-kant med sidelængderne $1, 2, \ldots, n$ (i en eller anden rækkefølge) hvis sider alle tangerer den samme cirkel?

Opgave 16. Bevis at ingen heltal a, b, x, y forskellige fra nul opfylder

$$\begin{aligned} ax - by &= 16 \text{ og} \\ ay + bx &= 1. \end{aligned}$$

Opgave 17. Forskellige heltal a, b, c, d opfylder

$$\begin{aligned} a &\mid b^2 + c^2 + d^2, \\ b &\mid a^2 + c^2 + d^2, \\ c &\mid a^2 + b^2 + d^2, \\ d &\mid a^2 + b^2 + c^2, \end{aligned}$$

og ingen af dem er større end produktet af de tre andre. Hvad er det størst mulige antal primtal blandt dem?

Opgave 18. Bestem alle heltalstripler (a, b, c) som opfylder ligningen

$$5a^2 + 9b^2 = 13c^2.$$

Opgave 19. Bestem alle polynomier p med heltallige koefficienter så $a + b$ går op i tallet $p(a) - p(b)$ for alle heltal a, b, forudsat at $a + b \neq 0$.

Opgave 20. Lad $n \geq 2$ være et heltal. Givet tallene $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ som opfylder $\operatorname{lcm}(a_i, a_j) > 2n$ for alle $1 \leq i < j \leq n$, bevis at

$$a_1 a_2 \cdots a_n \mid (n+1)(n+2) \cdots (2n-1)(2n).$$