Baltic Way 2018

Skt. Petersborg, 5. november, 2018

Version: *Danish*

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Der kan stilles spørgsmål de første 30 minutter.
Kun tegne- og skriveredskaber er tilladte.

Opgave 1. En endelig samling af (ikke nødvendigvis forskellige) positive, reelle tal er *balanceret*, hvis hvert tal i samlingen er strengt mindre end summen af de andre tal i samlingen. Find alle $m \geq 3$ så enhver balanceret samling af m positive, reelle tal kan partitioneres i tre dele, så summen af tallene i enhver del er strengt mindre end summen af tallene i de to resterende dele.
Her er en *samling* en ændring af begrebet mængde, hvor det samme element kan optræde flere gange.

Opgave 2. En 100×100 tabel er givet. For hvert k, $1 \leq k \leq 100$, indeholder cellerne i den $k$te række af tabellen tallene $1, 2, \ldots, k$ i voksende rækkefølge (fra venstre mod højre) men ikke nødvendigvis i på hinanden følgende celler. I de resterende $100 - k$ celler står der nuller. Vis at der eksisterer to søjler i tabellen, så summen af tallene i den ene søjle er mindst 19 gange så stor som summen af tallene i den anden søjle.

Opgave 3. Lad a, b, c og d være positive reelle tal, hvor $abcd = 1$. Vis uligheden

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}} + \frac{1}{\sqrt{b+2c+3d+10}} + \frac{1}{\sqrt{c+2d+3a+10}} + \frac{1}{\sqrt{d+2a+3b+10}} \leq 1.$$

Opgave 4. Find alle funktioner $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, som opfylder

$$f(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = f(x_1)^2 + \cdots + f(x_n)^2$$

for alle positive heltal n og ikke-negative reelle tal $x_1, \ldots, x_n$.

Opgave 5. Et polynomium $f(x)$ med reelle koefficienter kaldes *frembringende*, hvis der for ethvert polynomium $\varphi(x)$ med reelle koefficienter eksisterer et positivt heltal k og polynomier $g_1(x), \ldots, g_k(x)$ med reelle koefficienter således at

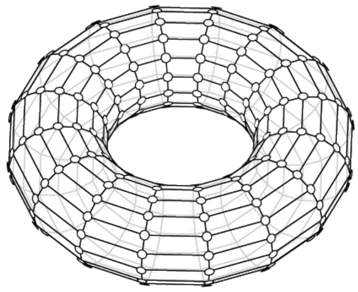
$$\varphi(x) = f(g_1(x)) + \cdots + f(g_k(x)).$$

Find alle frembringende polynomier.

Opgave 6. Lad n være et positivt heltal. Alfen Alf rejser i $\mathbb{R}^3$. Han starter i origo: $(0,0,0)$. I hver tur kan han teleportere sig til et punkt med afstand præcis $\sqrt{n}$ til hans nuværende position, som har heltallige koordinater. Teleportering er en kompliceret procedure. Alf er *normal* når han starter sin rejse, men han bliver *skør* efter sin første teleportering. Næste gang han teleporterer, bliver han *normal* igen, næste gang *skør* og så videre.

For hvilke n kan Alf rejse til ethvert punkt i $\mathbb{Z}^3$ og være *normal*, når han ankommer?

Opgave 7. I en 16×16 torus som vist farves hver kant enten blå eller rød. En farvning er *god*, hvis hver knude er endepunkt for et lige antal røde kanter. Et træk består i at vælge en celle og derefter skifte farverne på hver af de fire kanter, som omkranser den. Hvor mange forskellige gode farvninger kan man finde, så ingen af dem kan ændres til en af de andre ved at udføre et eller flere træk?

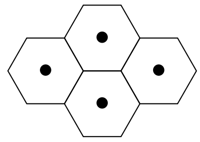


Opgave 8. En graf har N knuder. I en af knuderne sidder en usynlig hare. Nogle jægere forsøger at dræbe haren. I hvert træk skyder de alle samtidigt: hver jæger skyder mod en knude og de samarbejder om at vælge deres mål. Hvis haren var i en knude, som var mål for en jægers skud, er jagten ovre. Hvis ikke kan haren enten blive i sin nuværende knude eller hoppe til en af de tilstødende knuder.

Jægerne kender en algoritme, så de kan dræbe haren i højest $N!$ træk. Vis at der eksisterer en algoritme, så de kan dræbe haren i højest 2^N træk.

Opgave 9. Olga og Alexandra spiller et spil på et uendeligt hexagonalt gitter. De skiftes til at vælge en tom hexagon og lægge en sten på den. Olga starter. Lige før den 2018. sten lægges, introduceres en ny regel. En sten må nu kun lægges på en tom hexagon, hvis denne har mindst to naboer med sten.

En spiller taber, hvis hun ikke kan lægge en sten, eller hvis hendes træk resulterer i, at en udfyldt rombeform med sten som vist (roteret på enhver tænkelig måde) optræder. Bestem hvilken spiller, hvis nogen, som har en vindende strategi.



Opgave 10. Heltallene fra 1 til n står skrevet på n kort med et tal på hvert kort. Den første spiller fjerner et kort. Dernæst fjerner den anden spiller to kort med på hinanden følgende heltal. Herefter fjerner den første spiller tre kort med på hinanden følgende heltal. Endelig fjerner den anden spiller fire kort med på hinanden følgende heltal. Hvad er den mindste værdi af n, for hvilken den anden spiller kan sikre, at han kan gennemføre begge sine træk?

Opgave 11. Punkterne A, B, C og D ligger i den nævnte rækkefølge på en cirkel ω, så AD er diameter i ω. Det gælder, at $|AB| = |BC| = a$ og $|CD| = c$ for to indbyrdes primiske heltal a og c. Vis at hvis diameteren d af ω er et heltal, da er d eller $2d$ et kvadrattal.

Opgave 12. Højderne BB_1 og CC_1 i en spidsvinklet trekant ABC skærer i punktet H. Lad B_2 og C_2 være punkter på linjestykkerne BH og CH, henholdsvis, således at $|BB_2| = |B_1H|$ og $|CC_2| = |C_1H|$. Den omskrevne cirkel til trekant B_2HC_2 skærer den omskrevne cirkel til trekant ABC i punkterne D og E. Vis at trekanten DEH er retvinklet.

Opgave 13. Vinkelhalveringslinjen til A i trekant ABC skærer BC i punktet D og den omskrevne cirkel til trekant ABC i punktet E. Lad K, L, M og N være midtpunkterne på linjestykkerne AB, BD, CD og AC, henholdsvis. Lad P være centrum for den omskrevne cirkel til trekant EKL, og Q være centrum for den omskrevne cirkel til trekant EMN. Vis at $\angle PEQ = \angle BAC$.

Opgave 14. Cirklen ω er indskrevet i firkant $ABCD$. Punktet E er det skæringspunkt mellem ω og diagonalen AC, som ligger tættest på A. Punktet F er diametralsk modsat punktet E på cirklen ω. Tangenten til ω i punktet F skærer linjerne AB og BC i punkterne A_1 og C_1, henholdsvis, og linjerne AD og CD i punkterne A_2 og C_2, henholdsvis. Vis at $|A_1C_1| = |A_2C_2|$.

Opgave 15. To cirkler i planen skærer ikke hinanden, og ingen af dem ligger indeni den anden. Vi vælger diametre A_1B_1 og A_2B_2 i disse cirkler således at A_1A_2 og B_1B_2 skærer hinanden. Lad A og B være midtpunkterne af linjestykkerne A_1A_2 og B_1B_2, henholdsvis, og C være disse linjestykkers skæringspunkt. Vis at højdernes skæringspunkt i trekant ABC ligger på en linje, som er uafhængig af valget af diametre.

Opgave 16. Lad p være et ulige primtal. Find alle positive heltal n, som opfylder, at $\sqrt{n^2 - np}$ er et positivt heltal.

Opgave 17. Vis at uligheden $\sqrt{11} - \frac{p}{q} > \frac{1}{2pq}$ gælder for alle positive heltal p, q, som opfylder $\sqrt{11} > \frac{p}{q}$.

Opgave 18. Lad $n \geq 3$ være et heltal, således at $4n + 1$ er et primtal. Vis at $4n + 1$ deler $n^{2n} - 1$.

Opgave 19. En uendelig mængde B bestående af positive heltal har følgende egenskab. For hvert par $a, b \in B$ med $a > b$ er tallet $\frac{a-b}{\gcd(a,b)}$ element i B. Vis at B indeholder alle positive heltal.

Opgave 20. Find alle tripler af positive heltal (a, b, c) således at

$$\frac{(a+b)^4}{c} + \frac{(b+c)^4}{a} + \frac{(c+a)^4}{b}$$

er et helt tal og $a + b + c$ er et primtal.