Baltic Way 2006

Turku, 3. november 2006

Version: Dansk

1. For en følge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ af reelle tal vides det at

$$a_n = a_{n-1} + a_{n+2} \quad \text{for } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Hvad er det største antal på hinanden følgende elementer som kan være positive?

2. Antag at de reelle tal $a_i \in [-2, 17]$; $i = 1, 2, \ldots, 59$ opfylder $a_1 + a_2 + \cdots + a_{59} = 0$. Bevis at

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{59}^2 \leq 2006.$$

3. Bevis at for ethvert polynomium $P(x)$ med reelle koefficienter findes der et positivt heltal m og polynomier $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$ med reelle koefficienter således at

$$P(x) = (P_1(x))^3 + (P_2(x))^3 + \cdots + (P_m(x))^3.$$

4. Lad a, b, c, d, e, f være ikke-negative reelle tal som opfylder $a + b + c + d + e + f = 6$. Find den størst mulige værdi af

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab,$$

og bestem alle 6-tupler (a, b, c, d, e, f) for hvilke denne maksimale værdi opnås.

5. En til tider upålidelig professor har viet sin sidste bog til en bestemt binær operation $*$. Når denne operation anvendes på to vilkårlige heltal, er resultatet igen et heltal. Operationen vides at opfylde disse aksiomer:

a) $x * (x * y) = y$ for alle $x, y \in \mathbb{Z}$;

b) $(x * y) * y = x$ for alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

Professoren påstår i sin bog at

1. operationen $*$ er kommutativ: $x * y = y * x$ for alle $x, y \in \mathbb{Z}$.
2. operationen $*$ er associativ: $(x * y) * z = x * (y * z)$ for alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Hvilke af disse påstande følger fra de givne aksiomer?

6. Bestem den maksimale størrelse af en mængde af positive heltal med følgende egenskaber:

1. Heltallene består af cifre fra mængden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Intet ciffer optræder mere end én gang i samme heltal.
3. Cifrene i hvert heltal er i voksende orden.
4. Hvert par af heltal har mindst et ciffer til fælles (eventuelt i forskellige positioner).
5. Der er ikke noget ciffer som forekommer i samtlige heltal.

7. En fotograf tog nogle billeder til en fest med 10 personer. Hvert af de 45 mulige par af personer optræder sammen på præcis et billede, og på hvert billede er der to eller tre personer. Hvad er det mindst mulige antal billeder fotografen kan have taget?

8. Direktøren har fundet ud af at der er opstået seks sammensværgelser i hans afdeling. Hver af sammensværgelserne involverer præcis tre personer. Bevis at direktøren kan dele afdelingen i to underafdelinger, således at ingen af de konspirerende grupper er i samme underafdeling.

9. Til hvert hjørne i en regulær femkant knyttes et reelt tal. Vi må udføre følgende gentagne gange: Vælg to nabohjørner i femkanten, og erstat hvert af de to tal knyttet til disse hjørner med deres aritmetiske gennemsnit. Er det altid muligt at opnå stillingen hvor alle fem tal er nul, givet at summen af tallene i udgangsstillingen er nul?

10. 162 plusser og 144 minusser er placeret i en 30×30-tabel på en sådan måde at hver række og hver søjle indeholder højst 17 fortegn. (Ingen celle indeholder mere end et fortegn.) For hvert plus tæller vi antallet af minusser i dets række, og for hvert minus tæller vi antallet af plusser i dets søjle. Find den maksimale sum af disse tal.

11. Højderne i en trekant er 12, 15 og 20. Hvad er arealet af trekanten?

12. Lad ABC være en trekant, lad B_1 være midtpunktet af siden AB og C_1 midtpunktet af siden AC. Lad P være skæringspunktet, forskelligt fra A, mellem de omskrevne cirkler for trekanterne ABC_1 og AB_1C. Lad P_1 være skæringspunktet, forskelligt fra A, mellem linjen AP og den omskrevne cirkel for trekant AB_1C_1. Bevis at $2|AP| = 3|AP_1|$.

13. I en trekant ABC ligger punkterne D og E på henholdsvis siden AB og siden AC. Linjerne BE og CD skærer i F. Bevis at hvis

$$|BC|^2 = |BD| \cdot |BA| + |CE| \cdot |CA|,$$

så ligger punkterne A, D, F, E på en cirkel.

14. Der er markeret 2006 punkter på en sfære. Bevis at sfæren kan inddeles i 2006 indbyrdes kongruente stykker, således at hvert stykke indeholder præcis et af disse punkter i sit indre.

15. Lad medianerne i trekant ABC skære i punktet M. En linje t gennem M skærer den omskrevne cirkel for trekant ABC i X og Y på en sådan måde at A og C ligger på samme side af t. Bevis at $|BX| \cdot |BY| = |AX| \cdot |AY| + |CX| \cdot |CY|$.

16. Findes der fire forskellige positive heltal med den egenskab at produktet af vilkårlige to lagt til 2006, giver et kvadrattal?

17. Bestem alle positive heltal n, således at $3^n + 1$ er delelig med n^2.

18. For et positivt heltal n betegner a_n det sidste ciffer i $n^{(n^n)}$. Bevis at følgen (a_n) er periodisk, og bestem længden af perioden.

19. Findes der en følge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ af positive heltal, således at summen af vilkårlige n på hinanden følgende elementer er delelig med n^2 for ethvert positivt heltal n.

20. Et 12-cifret positivt heltal består kun af cifrene 1, 5 og 9 og er deleligt med 37. Bevis at summen af dets cifre ikke er lig 76.

Varighed: $4\frac{1}{2}$ time. 5 point pr. opgave.